

①

a) r è la retta per $P = (-3, 8, -2)$ parallela al vettore $\vec{v}_r = (1, -2, 0)$, quindi ha equazioni parametriche

$$r \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b) Il piano Π per P è parallelo al piano $x+y+z=0$ ha equazione $x+y+z+d=0$ con $-3+8-2+d=0$ cioè $d=-3$, dunque $\Pi: x+y+z-3=0$.

La retta s cercata giace su Π , passa per P e risulta essere perpendicolare alla retta $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$, la quale ha direzione individuata dal vettore

$$(1, -2, 0) \times (1, 1, 1) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-2, -1, 3).$$

Perciò se $\vec{v}_s = (x, y, z)$ è il vettore direzione di s , deve risultare che

$$\begin{cases} \vec{v}_s \cdot (1, 1, 1) = 0 \\ \vec{v}_s \cdot (-2, -1, 3) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ -2x-y+3z=0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x=4z \\ y=-5z \end{cases}$$

dunque possiamo scegliere $\vec{v}_s = (4, -5, 1)$. Equazioni parametriche per s sono quindi

$$s \begin{cases} x = -3 + 4\lambda \\ y = 8 - 5\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Da $\vec{v}_r = (1, -2, 0)$ e $\vec{v}_s = (4, -5, 1)$ otteniamo $|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = |\vec{v}_r| |\vec{v}_s| \sin \hat{v}_r \hat{v}_s$ ed allora $\sin \hat{v}_r \hat{v}_s = \frac{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_s|}$; calcoliamo

$$\begin{aligned} \vec{v}_r \times \vec{v}_s &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (-2, -1, 3) \quad \text{da cui} \quad \sin \hat{v}_r \hat{v}_s = \frac{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}{\sqrt{1^2+2^2} \sqrt{4^2+5^2+1^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5} \sqrt{42}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \end{aligned}$$

②

Abbiamo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2-y^3}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3y^2}{x^2-y^3}$, perciò un vettore normale

del piano tangente al grafico è dato da $\left(\frac{2x}{x^2-y^3}, \frac{-3y^2}{x^2-y^3}, -1 \right)$.

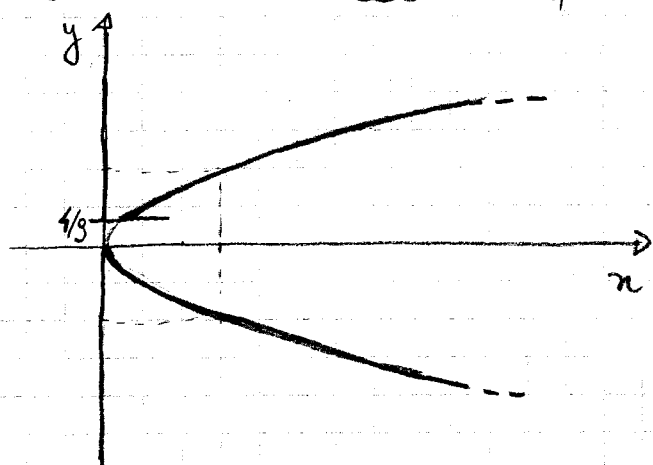
La condizione ricercata è perciò equivalente all'equazione

$$0 = \left(\frac{2x}{x^2-y^3}, \frac{-3y^2}{x^2-y^3}, -1 \right) \cdot (1, 1, 0) = \frac{2x}{x^2-y^3} - \frac{3y^2}{x^2-y^3}, \text{ con } 2x-3y^2$$

I punti ricercati sono quindi i $P=(x,y)$ appartenenti al dominio di f (che è differenziabile ove definita) tali che $x = \frac{3}{2}y^2$.

Sono pertanto i punti che stanno sulle parabole $x = \frac{3}{2}y^2$ con $x^2-y^3 > 0$, con tali che $\frac{3}{4}y^4 - y^3 > 0 \Leftrightarrow y^3(\frac{3}{4}y - 1) > 0$

$$\Leftrightarrow y < 0 \text{ oppure } y > \frac{4}{3}$$

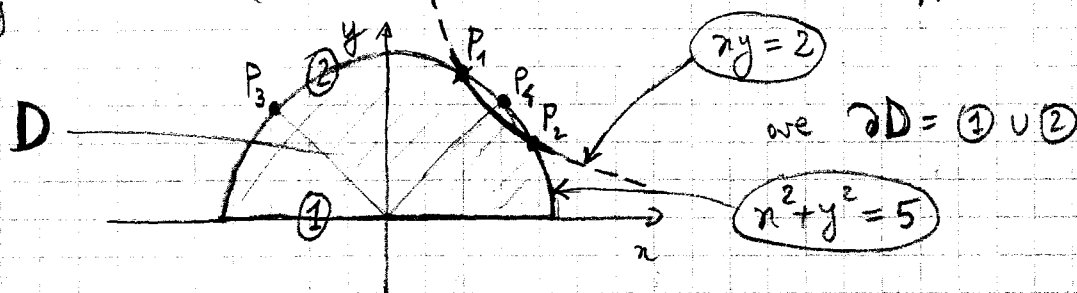


← TRATTO IN NERETTO DI PARABOLA

③ Notiamo che f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \left[e^{-\frac{xy}{2}} - \frac{xy}{2} e^{-\frac{xy}{2}} \right] = e^{-\frac{xy}{2}} y \left(1 - \frac{xy}{2} \right) \quad \text{e, analogamente,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-\frac{xy}{2}} x \left(1 - \frac{xy}{2} \right) \quad \text{Il dominio } D \text{ è rappresentato da}$$



$$\text{we } \partial D = \textcircled{1} \cup \textcircled{2}$$

$$x^2+y^2=5$$

a) Calcoliamo i punti critici interni a D:

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y(2-xy) = 0 \\ x(2-xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow xy = 2 \text{ oppure } x=y=0.$$

Dunque i punti critici interni a D sono esattamente i punti interni a

D tali che $xy=2$, quindi l'arco aperto $\widehat{P_1 P_2}$ sulla curva $xy=2$.

Il valore assunto da f su tutti questi punti è quindi $= 2e^{-1}$.

NB: I punti P_1 e P_2 sono le soluzioni nel 1° quadrante del sistema

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 2/x \\ x^2 + (2/x)^2 - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 2/x \\ x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

le soluzioni delle 2^e eq.^{ne} sono $x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$ cioè $x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

In definitiva si ottiene $P_1 = (1, 2)$ e $P_2 = (2, 1)$.

b) Sulle parte ① di ∂D abbiamo che $f = 0$.

c) Sulle parte ② di ∂D i punti di estremo sono da ricercarsi

tra le soluzioni di $\begin{cases} \nabla \bar{f}(P) = 0 \\ g(P) = 0 \end{cases}$ ove $g(x, y) = x^2 + y^2 - 5$

e dunque tra le soluzioni di $\begin{cases} \det \begin{pmatrix} e^{-\frac{xy}{2}} y (1 - \frac{xy}{2}) & e^{-\frac{xy}{2}} x (1 - \frac{xy}{2}) \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

$$\text{cioè} \quad \begin{cases} y^2(2-xy) - x^2(2-xy) = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} (y^2 - x^2)(2-xy) = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{cioè} \quad \begin{cases} |y| = |x| \\ 2x^2 = 5 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad \text{Dal primo sistema}$$

otteniamo i punti su ②: $P_3 = (-\sqrt{5/2}, \sqrt{5/2})$ e $P_4 = (\sqrt{5/2}, \sqrt{5/2})$.

Dal secondo sistema (vedi inizio di queste pagine) otteniamo i punti $P_1 = (1, 2)$ e $P_2 = (2, 1)$.

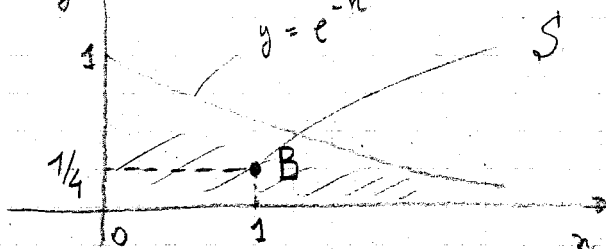
d) Confrontiamo i valori di f nei punti candidati ad essere estremi:

$$f(\text{punti interni}) = f(P_1) = f(P_2) = 2e^{-1}, \quad f(P_3) = -\frac{5}{2}e^{5/4},$$

$$f(P_4) = \frac{5}{2}e^{-5/4}. \quad \text{In definitiva otteniamo che}$$

- i punti dell'arco $\widehat{P_1 P_2}$ delle curve $xy = 2$ sono di Max assoluto
- il punto $P_3 = (-\sqrt{5/2}, \sqrt{5/2})$ è di min assoluto.

4



$$\text{Area di } S = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^{e^{-n}} dy = \int_0^{+\infty} e^{-n} \frac{1}{n} dn = \left[-e^{-n} \right]_0^{+\infty} = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 1,$$

quindi:

$$n_B = \int_0^{+\infty} n \int_0^{e^{-n}} dy = \int_0^{+\infty} n e^{-n} dn = \left[-n e^{-n} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-n} dn = \left[-e^{-n}(n+1) \right]_0^{+\infty} = 1$$

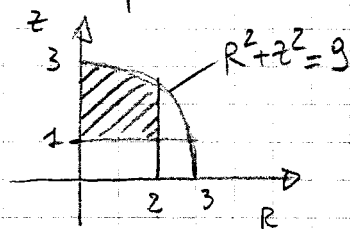
$$y_B = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^{e^{-n}} y dy = \int_0^{+\infty} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{e^{-n}} \frac{1}{n} dn = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-2n} \frac{1}{n} dn = \left[-\frac{1}{4} e^{-2n} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

Perciò $B = (1, 1/4)$.

5) In coordinate cilindriche V si trasforma in

$$V' = \{(R, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid R^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq R \leq 2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, z \geq 1\}$$

la cui sezione (che non dipende da θ) nel piano (R, z) è data dalle figure



$$\begin{aligned} \text{Dunque } \iiint_V \frac{\pi}{z^3} dxdydz &= \iiint_{V'} \frac{R \cos \theta}{z^3} \cdot R dR d\theta dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^2 R^2 dR \int_1^{\sqrt{9-R^2}} \frac{1}{z^3} dz = \\ &= [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 R^2 \left[-\frac{1}{2z^2} \right]_1^{\sqrt{9-R^2}} dR = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 R^2 \left(1 - \frac{1}{9-R^2} \right) dR = \int_0^2 \left(R^2 + \frac{9-R^2-9}{9-R^2} \right) dR = \\ &= \left[\frac{R^3}{3} + R \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{9}{9-R^2} dR = \frac{8}{3} + 2 - \int_0^2 \left(\frac{3/2}{3-R} + \frac{3/2}{3+R} \right) dR = \\ &= \frac{14}{3} - \frac{3}{2} \left[\ln |3-R| + \ln |3+R| \right]_0^2 = \frac{14}{3} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{9}{5} \right). \end{aligned}$$

(infatti $\frac{9}{9-R^2} = \frac{9}{(3-R)(3+R)} = \frac{3/2}{3-R} + \frac{3/2}{3+R}$ con il metodo dei coeff. parz.)

⑥ Per $n \rightarrow +\infty$ si ha che $\begin{cases} (e^{\frac{1}{n}} - 1) \text{ è infinitesimo di ordine } 1 \\ (1 - \cos \frac{1}{n}) \text{ è infinitesimo di ordine } 2 \\ \ln(1 + \frac{1}{n}) \text{ è infinitesimo di ordine } 1 \end{cases}$

infatti $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n - 1}{n} \stackrel{(H)}{=} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n}{1} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos n}{n^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin n}{2n} \stackrel{(H)}{=} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\cos n}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(1+n)}{n} \stackrel{(H)}{=} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{1+n} = 1 \end{cases}$

cosicchè $a_n = \frac{(e^{\frac{1}{n}} - 1)(1 - \cos \frac{1}{n})}{\ln(1 + \frac{1}{n})}$ è infinitesimo di ordine $(1+2) = 3$

Essendo $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$ (in quanto prodotto di fattori > 0), si può applicare il criterio dell'ordine di infinitesimo, che permette di concludere che la serie è convergente.